Laboratoire d'Analyse-Recherche en Economie Quantitative

One Pager	JANVIER 2015	Divers 01/GK/16-01-15

Facteur d'escompte : Version discrète vs Version continue.

Deo Grace KIALA

Résumé

Ce papier s'inscrivant dans le cadre de divers de réunion Laréq se propose de présenter rigoureusement et de manière détaillée le passage dans un problème de croissance optimal du facteur d'escompte d'une version discrète à celui d'une version continue.

Développement

Dans l'analyse de macroéconomique moderne, le temps peut être considéré soit comme une variable discrète soit comme une variable continue. Considérant un problème de croissance optimal, le facteur d'escompte permet de déterminer la valeur actuelle d'un revenu perçu dans le futur.

Dans sa version discrète, le facteur d'escompte se note :

$$\beta = \frac{1}{1+\rho'} \tag{1}$$

Avec ρ le taux d'escompte, $\rho > 0$

Puis en version continue, il s'exprime comme suit :

$$\beta = exp\{-\rho t\} \tag{2}$$

avec ρ le taux d'escompte

Le terme exp figurant dans l'équation (2) renvoie à la notion d'exponentielle. On note :

$$\exp(x) = e^x \tag{3}$$

De plus, il doit être évident que :

$$e^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t \tag{4}$$

Comme évoqué ci-haut, le facteur d'escompte consiste à déterminer la valeur d'aujourd'hui d'un revenu à percevoir dans le futur : C'est donc l'inverse de la capitalisation

$$y = \beta(1+\rho)^t \tag{5}$$

Ainsi, cette valeur d'aujourd'hui se note comme suit :

$$\beta = y(1+\rho)^{-t} \tag{6}$$

Avec

- β la valeur du revenu d'aujourd'hui y
- $(1+\rho)^{-t}$ le facteur d'actualisation

Considérons λ les intérêts à recevoir au temps t. Dès lors, l'équation (5) peut s'écrire plus clairement comme suit :

$$y = \beta\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)^{\lambda t} \tag{7}$$

A ce niveau, il convient de faire appel aux notions de limite afin d'aboutir au résultat attendu. Admettons que $\lambda \rightarrow \infty$, on trouve :

$$\lim_{\lambda\rightarrow\infty} y = \lim_{\lambda\rightarrow\infty}\left\{\beta\left(1 + \frac{\rho}{\lambda}\right)^{\lambda t}\right\} \tag{8}$$

A présent, insérons dans la démarche la variable ω qui s'écrit :

$$\omega = \frac{\lambda}{\rho} \;\Rightarrow\; \omega^{-1} = \frac{\rho}{\lambda} \tag{9}$$

En substituant (9) dans (8) avec $\lambda \rightarrow \infty$ et $\omega \rightarrow \infty$, il vient que :

$$\lim_{\omega\rightarrow\infty} y = \lim_{\omega\rightarrow\infty}\left\{\beta\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega\lambda t}\right\} \tag{10}$$

Après arrangement, la relation (10) devient :

$$\lim_{\omega\rightarrow\infty} y = \lim_{\omega\rightarrow\infty}\{\beta[(1 + \omega^{-1})^{\omega}]^{\lambda t}\} \tag{11}$$

$$\text{où} \quad \omega^{-1} = \frac{\rho}{\lambda}$$

Au regard de la relation (11), on peut s'appuyer donc sur la propriété de limite suivante :

$$\lim_{x\rightarrow 0}(1 + ax)^{\frac{b}{x}} = e^{a.b} \tag{12}$$

Ainsi l'équation (11) peut alors s'écrire comme suit :

$$\lim_{\omega\rightarrow\infty}\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = \lim_{x\rightarrow 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{x} \tag{13}$$

Il ressort de ce qui précède que :

$$y = \beta e^{\rho t} \tag{14}$$

Nous savons que :

$$e^{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1 + \frac{x}{t}\right)^{t} \tag{15}$$

Nous obtenons en définitive le facteur d'escompte :

$$\beta = y e^{-\rho t} \tag{16}$$

Supposons$y = 1$, il vient que :

$$\beta = e^{-\rho t} = \exp(-\rho t) \tag{17}$$

Bibliographie

- BERTSEKAS Dimitri P., 1998, Network Optimization : Continous and Discrete Model, Athena Scientific, Belomont, Massachussets.
- NSHUE Mbo M., 2014, Note de cours de croissance et fluctuation économique, UPC Kinshasa.